数理解析研究所講究録
910 巻 1995 年 108-122

ペトリネットとその言語について

山崎　秀記
(Hideki YAMASAKI)
一橋大学　数学共同研究室
〒186　国立市　中2－1

1　前書き

ペトリネット (Petri net) は、非同期的かつ平行的なシステムにおける情報の流れや制御を記述し解析するための数学的モデルである．1962年にPetriによって提案されていらい [5]，広範囲に応用され，深く研究されてきた．

本論文では，特にペトリネットの言語理論的な側面に焦点をあてて，論ずる．これはペトリネットでモデル化したシステムにおいて起こりうる動作列全体を，そのペトリネットの生成する言語として捉えようとするものである．その結果，従来のオートマトンによって定義される言語族とはかなり異なる性質を持つ言語族がえられる．

2節で基本的定義を述べたあと，3節ではペトリネットで生成される有限の長さの語の集合（ペトリネット言語）の族について，4節ではペトリネットで生成される無限の長さの語の集合（ペトリネットω言語）の族について調べる．

2　基本的定義

整数の集合 $\{0, 1, \text{-}1, 2, \text{-}2, \ldots\}$ を$\mathbf{Z}$で，自然数（非負整数）の集合 $\{0,1,2,\ldots\}$ を$\mathbf{N}$で表す．集合XとYに対し，Y^XでXからYへの関数全体$\{f \mid f : X \to Y\}$を表す．特に Xが有限集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ のとき，関数 $f \in \mathbf{Z}^X$を$\mathbf{Z}$ 上の n 次元ベクトル$\langle f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\rangle$ と同一視する．また，関数 $f, g \in \mathbf{Z}^X$ と $z \in \mathbf{Z}$に対し，和 $f+g$，スカラー倍 zf，部分順序 $f \leq g$ を通常の成分毎の定義で与える．$F \subseteq \mathbf{Z}^X$に対し，Fの元より大きなベクトルの

集合を$\uparrow F$で表す.

$$\uparrow F = \{m' \mid \text{ある } m \in F \text{が存在して } m' \geq m\}.$$

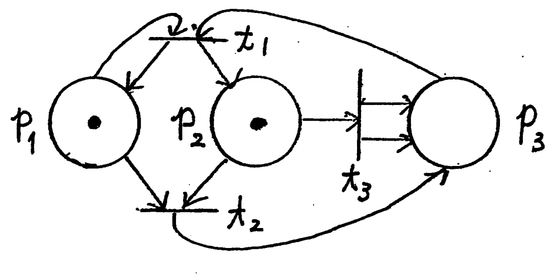
Σをアルファベットとする. Σ上の有限の長さの語の全体を Σ^*で表し, 空列をλで表す. また, Σ上の無限の長さの語の集合を Σ^ωで表す. すなわち,

$$\Sigma^\omega = \{a_1 a_2 \cdots \mid a_1, a_2, \cdots \in \Sigma\}.$$

$\alpha = a_1 a_2 \cdots \in \Sigma^\omega$ に対し, αの n 番目の文字 a_n を $\alpha(n)$ で表す. 任意の $u \in \Sigma^*$と$\alpha \in \Sigma^*(\Sigma^\omega)$ に対し, $u\alpha$で u の後ろにαを連接してえられる$\Sigma^*(\Sigma^\omega)$の語を表わす. $\alpha = u\beta$のとき, u はαの接頭語であるといい, $u \sqsubseteq \alpha$ と書く.

ペトリネット N は $N = (P, T, A, m_0)$ の 4 つ組で与えられる. ここで, P は**プレース** (place) の有限集合, T は**遷移** (transition) の有限集合, $A : T \to \mathbf{N}^P \times \mathbf{N}^P$ は**アーク関数**, $m_0 \in \mathbf{N}^P$ は**初期マーキング**, である. 各遷移 t に対し, $A(t) = \langle {}^\bullet A(t), A(t)^\bullet \rangle$ で割り当てられる一対の関数 (ベクトル) ${}^\bullet A(t)$, $A(t)^\bullet$をそれぞれ t の**入力ベクトル**, **出力ベクトル**という.

例 1 $N = (\{p_1, p_2, p_3\}, \{t_1, t_2, t_3\}, A, \langle 1, 1, 0 \rangle)$ とする. ただし, $A(t_1) = \langle \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 1, 1, 0 \rangle \rangle$, $A(t_2) = \langle \langle 1, 1, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle \rangle$, $A(t_3) = \langle \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 0, 0, 2 \rangle \rangle$, である. このときペトリネット Nは以下のように図示される. ◯でプレースを表し, | で遷移を表す. そして, プレース p から遷移 t には${}^\bullet A(t)(p)$ 本のアークが, t から p には $A(t)^\bullet(p)$ 本のアークが引かれる. 初期マーキングは各プレースに置かれた・(**トークン**という) で表される. すなわち, 各プレース p には, 最初, $m_0(p)$ 個のトークンが置かれる.



一般にトークンの配置 $m \in \mathbf{N}^P$をペトリネット Nの**マーキング**という. マーキングはペトリネットの状態を示すもので, マーキング m において, 各プレース p は $m(p)$ 個のトークンを持つ. 遷移 t がマーキング m で**発火可能**

であるというのは $m \geq {}^\bullet A(t)$ のときで，このとき t は m で発火してその結果マーキングを

$$m' = m - {}^\bullet A(t) + A(t)^\bullet$$

に変える．このことを $m[t\rangle$ または $m[t\rangle m'$ と書く．直観的に言うと遷移 t の発火は ${}^\bullet A(t)(p)$ 個のトークンを各プレース p から取り去り，$A(t)^\bullet(p)$ 個のトークンを各プレース p に分配する．

上の定義や記法は遷移の有限および無限列に拡張される．すなわち，

$$m[t_1\rangle m_1[t_2\rangle m_2 \ldots m_{n-1}[t_n\rangle m'$$

のとき $m[t_1t_2\ldots t_n\rangle$, $m[t_1t_2\ldots t_n\rangle m'$ と書き，

$$m[t_1\rangle m_1[t_2\rangle m_2\ldots$$

のとき $m[t_1t_2\ldots\rangle$ と書く．

どの遷移も発火可能でないようなマーキングを**デッドロック**という．

例 2 例 1 のペトリネット N において，初期マーキング $\langle 1,1,0\rangle$ で発火可能な遷移は t_2 と t_3 である．t_2 を発火するとマーキングは $\langle 0,0,1\rangle$ となり，これ以上どの遷移も発火可能でない（デッドロック）．

初期マーキングで t_3 を発火すると，つづいて t_1 が発火可能になり，

$$\langle 1,1,0\rangle[t_3\rangle\langle 1,0,2\rangle[t_1\rangle\langle 1,1,1\rangle$$

となる．ここで $\langle 1,1,0\rangle < \langle 1,1,1\rangle$ であるから，t_3t_1 は初期マーキングから繰り返し発火可能であることがわかる．

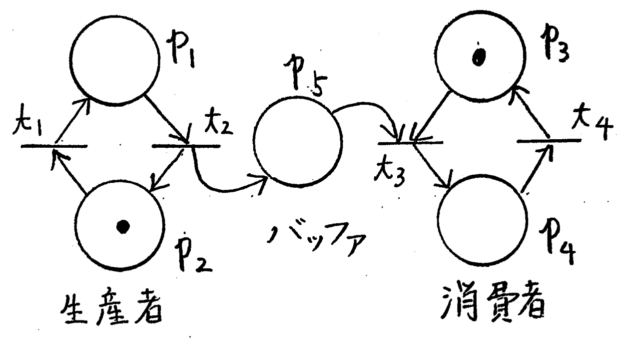
さて，いくつか具体的な問題に対するペトリネットの例をあげよう．

例 3 生産者消費者問題：ある生産物の生産者と消費者の関係を表すペトリネットである．生産者は生産物をバッファに貯めていき，消費者はバッファにある生産物を消費していく．

$$N = (\{p_1,\cdots,p_5\},\{t_1,\cdots,t_4\},A,\langle 0,1,1,0,0\rangle)$$

ここで，$A(t_1) = \langle\langle 1,0,0,0,0\rangle,\langle 0,1,0,0,1\rangle\rangle$, $A(t_2) = \langle\langle 0,1,0,0,0\rangle,\langle 1,0,0,0,0\rangle\rangle$, $A(t_3) = \langle\langle 0,0,1,0,1\rangle,\langle 0,0,0,1,0\rangle\rangle$, $A(t_4) = \langle\langle 0,0,0,1,0\rangle,\langle 0,0,1,0,0\rangle\rangle$ であ

る．プレース p_2中のトークンは生産者を，プレース p_3中のトークンは消費者

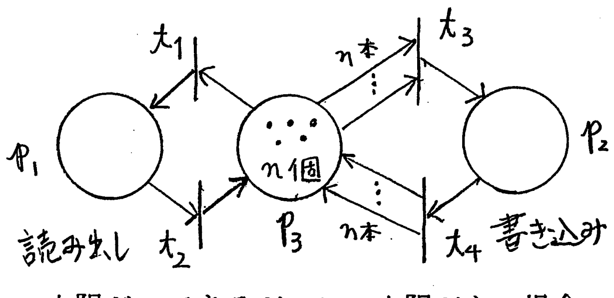


を表し，遷移 t_1, t_2は生産の終了と開始を，遷移 t_3, t_4は消費の開始と終了を表す．プレース p_5がバッファで，その中のトークンが生産物に対応する．このペトリネットでは生産者が生産した以上のものを消費することはできない状況をモデル化していることに注意しよう．

例 4 読み書き問題は，データを共有する読み出しや書き込みをどう制御するかという問題である．読み出しプロセスはデータを変更しないので他の読み出しプロセスと共存可能であるが，書き込みプロセスは他のプロセスを（読み出しも書き込みも）すべて排除しなければならない．以下のペトリネットでは，同時に可能な読み出しプロセスの最大数が n 個までという制限がついている．

$$N = (\{p_1, p_2, p_3\}, \{t_1, \cdots, t_4\}, A, \langle 0, 0, n\rangle)$$

ここで，$A(t_1) = \langle\langle 0,0,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle\rangle$，$A(t_2) = \langle\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,1\rangle\rangle$，$A(t_3) = \langle\langle 0,0,n\rangle, \langle 0,1,0\rangle\rangle$，$A(t_4) = \langle\langle 0,1,0\rangle, \langle 0,0,n\rangle\rangle$．この例では同時に可能な読



み出しプロセスの上限が n であるが，この上限がない場合，ペトリネットではモデル化できないことが知られている．これは，ペトリネットにおける発火条件が $m \geq {}^{\bullet}A(t)$ という形をしていて，「あるプレース中にトークンが存在しないときに発火可能になる」といった条件を表わすことができないため

である（上の例ではプレースp_1中のトークン（読み出しプロセス）がないことを，プレースp_3にn個のトークンがあることで間接的に判定している）．一般に，ペトリネットに，トークン数が0であることを判定できる機能を付け加えると，チューリング機械と同等の能力を持つことが知られている．[9]

3　ペトリネット言語

ペトリネット言語を考えるさいには，その遷移にラベルをつけた，ラベルつきペトリネットを考え，受理マーキングの集合を指定するのが一般的である．

Σ上の**ラベル付きペトリネット** N は $N = (P, T, A, m_0, e, F)$ の6つ組で与えられる．ここで，P，T，A, m_0，はペトリネットと同じで，$e : T \to \Sigma \cup \{\lambda\}$ は**ラベル関数**，$F \subset \mathbf{N}^P$ はマーキングの有限集合，である．以後，ラベル付きペトリネットを単にペトリネットと呼ぶ．

われわれはペトリネットNの振るまい，すなわちNが生成する言語を，受理マーキングに到達するような発火列全体のラベル関数による準同型写像の像

$$\{e(v) \mid m_0[v\rangle m \text{ かつ } m \text{ は受理マーキング} \}$$

で与える．そして，ラベル関数に対する制限と受理マーキングの与え方によって様々なペトリネット言語が定義される．

実際，ラベル関数として次の3タイプが研究されている．

1. 1対1写像，$e : T \to \Sigma$，は異なる遷移はすべて異なる動作に対応するという考え方を反映したものである．これを自由な (free) ラベル付けという．

2. λなし写像，$e : T \to \Sigma$，は同一の動作が異なる環境のもとで起こりうることからそれらは異なる遷移でモデル化できるとの考え方を反映している．

3. 一般の写像，$e : T \to \Sigma \cup \{\lambda\}$，では，空列によるラベル付けを許す．これはモデル化の過程でシステムの具体的動作には対応しないような遷移を導入しししてしまうこともあるとの立場から，そのような遷移には空列のラベルを付けることを許す考え方である．

また，受理マーキング（受理状態）の定め方では次の4タイプが研究されている．

1. P型：条件なし，マーキング全体，
$P(N) = \{e(u) \mid u \in T^*, m_0[u\rangle\}$
これは，すべての発火可能な遷移列を受理する．

2. T型：デッドロック全体，
$T(N) = \{e(u) \mid u \in T^*, m_0[u\rangle m$ かつ m はデッドロック $\}$
これは，デッドロック（どの遷移も発火可能でない状態）に到達する遷移列を受理する．

3. L型：有限集合 F で指定されたマーキング，
$L(N) = \{e(u) \mid u \in T^*, m_0[u\rangle m \in F\}$
これは指定されたマーキングに正確に到達するような遷移列だけを受理する．L型のペトリネット言語のクラスは豊富でかつ強力であるが，このような受理条件を設けることは，ペトリネットの基本原理「$m' \geq m[u\rangle$ ならば $m'[u\rangle$」に反するというおそれもある．このことから，次のG型が定義される．

4. G型：F で指定されたマーキングより大きなマーキング全体，
$G(N) = \{e(u) \mid u \in T^*, m_0[u\rangle m \in \uparrow F\}$

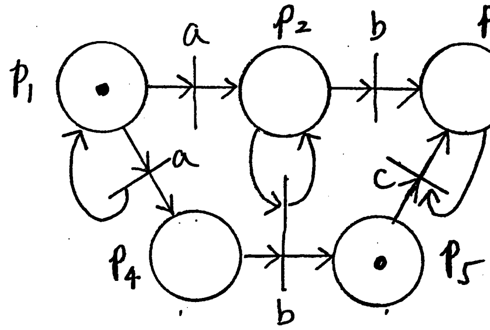
例 5 $N = (\{p_1, \ldots, p_5\}, \{t_1, \ldots, t_5\}, A, \langle 1,0,0,0,1\rangle, e, \{\langle 0,0,1,0,0\rangle\})$ とする．ただし，

$A(t_1) = \langle\langle 1,0,0,0,0\rangle, \langle 0,1,0,0,0\rangle\rangle$, $A(t_2) = \langle\langle 1,0,0,0,0\rangle, \langle 1,0,0,1,0\rangle\rangle$,

$A(t_3) = \langle\langle 0,1,0,0,0\rangle, \langle 0,0,1,0,0\rangle\rangle$, $A(t_4) = \langle\langle 0,1,0,1,0\rangle, \langle 0,1,0,0,1\rangle\rangle$,

$A(t_5) = \langle\langle 0,0,1,0,1\rangle, \langle 0,0,1,0,0\rangle\rangle$,

$e(t_1) = e(t_2) = a$, $e(t_3) = e(t_4) = b$, $e(t_5) = c$ である．



このとき，

$$P(N) = \{u \mid u \sqsubseteq a^k b^m c^n,\ 1 \le n \le m \le k\}$$

$$T(N) = G(N) = \{a^k b^m c^n \mid 1 \le n \le m \le k\}$$

$$L(N) = \{a^n b^n c^n \mid 1 \le n\}$$

となる.

結局，ラベル関数の３タイプと受理マーキングの４タイプの組み合わせで都合１２タイプのペトリネット言語族についてその包含関係や言語演算のもとでの閉包性が調べられている．包含関係については，次のような結果が知られている．[9]

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{1対1ラベル関数} & \mathbf{P}_f & \subset & \mathbf{G}_f & & \mathbf{L}_f & & \mathbf{T}_f \\
 & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\lambda\text{なしラベル関数} & \mathbf{P} & \subset & \mathbf{G} & \subset & \mathbf{L} & \subset & \mathbf{T} \\
 & \cap\!\mid & & \cap\!\mid & & \cap\!\mid & & \cap \\
\text{一般のラベル関数} & \mathbf{P}_\lambda & \subset & \mathbf{G}_\lambda & \subseteq & \mathbf{L}_\lambda & = & \mathbf{T}_\lambda
\end{array}$$

一方，種々の言語演算のもとでの閉包性に付いては，次のような結果が知られている．ここで，

∪は集合和，∩は集合積，C は補集合を表し，

·は連接：$A \cdot B = \{xy \mid x \in A$ かつ $y \in B\}$,

△はシャッフル演算：$A \triangle B = \{x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots x_n y_n \mid$
$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \Sigma^*, x_1 x_2 \cdots x_n \in A, y_1, y_2, \cdots, y_n \in B\}$

R は逆転：$A^{\mathrm{R}} = \{a_n \cdots a_2 a_1 \mid a_1, \cdots, a_n \in \Sigma, a_1 a_2 \cdots a_n \in A\}$ である．

	∪	∩	C	·	△	R
$\mathbf{L}_\lambda = \mathbf{T}_\lambda$	○	○	×	○	○	○
$\mathbf{G}_\lambda, \mathbf{P}_\lambda$	○	○	×	○	○	×
$\mathbf{L}$	○	○		○	○	○
$\mathbf{G}, \mathbf{P}$	○	○	×	○	○	×
$\mathbf{T}$	×	○	×	○	○	○
$\mathbf{L}_f, \mathbf{G}_f, \mathbf{T}_f, \mathbf{P}_f$	×	○	×	×	×	×

上の結果を全部ここで証明することはできないが，以下，L型ペトリネット言語のクラス $\mathbf{L}$ を例に上げて，閉包性やチョムスキー階層との比較を簡単に議論しよう．

定理 1 $\mathbf{L}$ は正規言語の族を真に含み，文脈依存言語族には真に含まれる．また，文脈自由言語族とは比較不能である．

証明．ペトリネットが決定性有限オートマトンを模倣できることは明かである．実際，ペトリネットのプレースを有限オートマトンの状態に対応させ，有限オートマトンの遷移$\delta(p,a)=q$ に対応して，p からの入力アークと qへの出力アークを1本ずつ持つペトリネットの遷移を構成する．オートマトンの現在の状態は，対応するプレースが1個のトークンを持つマーキングで表わされる．したがって，$\mathbf{L}$ は正規言語の族を含む．

一方，例5にあるように $\{a^nb^nc^n \mid n\geq 1\}\in\mathbf{L}$ なので，$\mathbf{L}$ は正規言語族を真に含み，文脈自由言語族には含まれない．

ここで，$|\Sigma|=k>1$ のとき，$K=\{ww^R \mid w\in\Sigma^*\}$ が $\mathbf{L}$ に含まれないことを示そう．L型ペトリネット Nが Kを生成するためには，r回の発火の後に到達可能なマーキングの個数が k^r個存在しなければならない．ところが，到達可能マーキングは各遷移の発火回数によって一意に定まるので，r回の発火の後の到達可能マーキングの総数は高々，rを m 個（m はペトリネット Nの遷移の個数）の自然数の和に分ける分け方の総数$\begin{pmatrix} r+m-1 \\ m-1 \end{pmatrix}$で抑えられる．これは rの多項式なので，十分大きな rでは k^rより小さい．よって，L型ペトリネットで Kを生成することは不可能である．

また上の議論から分かるように，到達可能マーキングの集合は，入力の長さの多項式で抑えられるので，線形有界チューリング機械で模倣可能である．よって，$\mathbf{L}$ は文脈自由言語族に含まれる． □

次に，$\mathbf{L}$ が和および連接で閉じていることを示すために，ペトリネットの標準形を定義し，任意のペトリネット Nに対し，$L(N)=L(N')$ となる標準形ペトリネット N'を構成できることを示そう．

ペトリネット $N'=(P',T',A',m_0',e',\{m_f'\})$ が標準形であるというのは，

1. 初期プレース $p_s\in P'$を持ち，初期マーキング m_0'はトークンが初期プレースに1個だけあるようなマーキングである

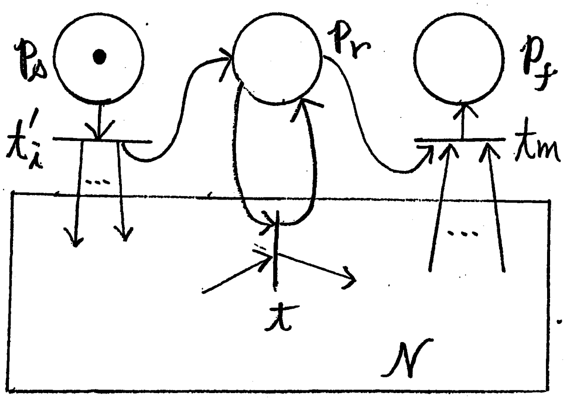
2. 受理プレース $p_f \in P'$ を持ち，受理マーキングは受理プレースにトークンを１個だけ持つようなマーキング m'_f １つだけである．

3. p_f にトークンがあるような任意のマーキングはデッドロックである．

$N = (P, T, A, m_0, e, F)$ を任意のペトリネットとする．N を標準形に変換するために，N に新しく３個のプレース p_s, p_r, p_f を付け加え $P' = P \cup \{p_s, p_r, p_f\}$ とする．p_r にトークンがあるときのみ，N の各遷移が発火可能になるように N の各遷移 $t \in T$ に p_r からの入力アークと p_r への出力アークを１本ずつ付け加える．

次に，N の初期マーキングで発火可能な遷移の集合を $\{t_1, \ldots, t_k\}$ とし，$m_0[t_i\rangle m_i$ とおく $(i = 1, \ldots, k)$．N に新しく k 個の遷移 $t'_1, \ldots, t'_k$ を付け加える．各 t'_i には p_s からの入力アークを１本と，N の各プレース p への $m_i(p)$ 個の出力アークと p_r への出力アーク１本を付け加え，t_i と同じラベルをつける．t'_i の働きは，N の初期マーキングで t_i を発火させた後と同じ状態を N' に作り出し，p_s にあるトークンを p_r に移すことにある．

最後に，ペトリネット N の各 $t \in T$ と $m, m[t\rangle m_1 \in F$ に対し，t と同じラベルを持つ遷移 t_m を追加する．各 t_m には，p_r からの入力アーク１本と，N の各プレース p からの $m(p)$ 本の入力アークをを付け，p_f への出力アークを１本付ける．t_m の働きは，N において $m[t\rangle m_1 \in F$ となるとき，m_1 に対応する N' のマーキング m'_1 に対し，$m'[t_m\rangle m'_f$ となるようにすることである．



この結果，ペトリネット N は標準形に変換される．

定理 2 **L** は集合和，集合積，連接，シャッフル，逆転の演算に関して閉じている．

証明．N_1, N_2を標準形ペトリネットとする．連接 $L(N_1) \cdot L(N_2)$ を生成するペトリネットは，N_2の初期プレースと N_1の受理プレースを同一視してえられる．

集合和 $L(N_1) \cup L(N_2)$ を受理するペトリネットは，N_1と N_2の初期プレースを同一視し，N_1と N_2の受理プレースを同一視してえられる．

シャッフル $L(N_1) \triangle L(N_2)$ を受理するペトリネットは，N_1, N_2 を並べて，それぞれの初期プレースに 1 個ずつトークンをおいたマーキングを初期マーキングとすればよい．受理マーキングはそれぞれの受理プレースに 1 個ずつトークンがあるマーキングとする．

逆転 $L(N_1)^{\mathrm{R}}$を受理するペトリネットは，N_1の各遷移の入力アークと出力アークを交換し，さらに初期プレースと受理プレースを交換することによってえられる．最後に，集合積 $L(N_1) \cap L(N_2)$ を受理するペトリネットを構成するためには，N_1と N_2の直積ペトリネット Nを構成する．Nは N_1と N_2を同時平行的に模倣し，ともに，受理マーキングに到達したとき，入力を受理する．詳しい構成は後の定理 5 の証明を参照して欲しい． □

なお，表で抜けている箇所，**L** が補集合演算で閉じているか否かは未解決である．

4 ペトリネットω言語

ペトリネットω言語においては，λなしラベル関数を考える．ω語の受理条件を考えるさいには，有限の長さの語の場合のように，最後に到達するマーキングというものがないので，最後の状態が受理マーキングか否かで判定するわけにはいかない．そこで有限オートマトンのときと同様に，いくつかの受理条件が考えられる．受理マーキングの集合はG型の $\uparrow F$ とする．ペトリネット $N = (P, T, A, e, m_0, F)$ と $\alpha \in T^* \cup T^\omega$ に対し

$$m_0[\alpha(1)\rangle m_1[\alpha(2)\rangle m_2 \ldots$$

のとき，$N(\alpha) = m_0 m_1 m_2 \ldots$ と定義する．

Nで受理される次の 5 種類のω言語を考える．

特に受理条件を指定せず，すべての無限発火列を受理する場合，

$$L_0(N) = \{e(\alpha) \mid m_0[\alpha\rangle\},$$

受理マーキングを通る発火列を受理する

$$L_1(N) = \{e(\alpha) \mid \underline{N(\alpha)} \cap \uparrow F \neq \phi\},$$

受理マーキングのみを通る発火列を受理する

$$L_2(N) = \{e(\alpha) \mid \underline{N(\alpha)} \subseteq \uparrow F\},$$

受理マーキングを無限回通過する発火列を受理する

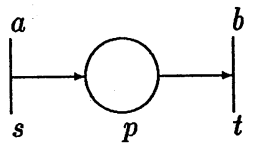
$$L_3(N) = \{e(\alpha) \mid \underline{\underline{N(\alpha)}} \cap \uparrow F \neq \phi\},$$

ある時点からさきはすべて受理マーキングである発火列を受理する

$$L_4(N) = \{e(\alpha) \mid \underline{\underline{N(\alpha)}} \subseteq \uparrow F\}.$$

さらに $\mathbf{P}_i = \{L_i(N) \mid N$ は Σ 上のペトリネット $\}$ $(i = 0, \ldots, 4)$ と定義する．[3, 4] では F を $\uparrow F$ の代わりに用いたL型のペトリネット ω 言語が研究されている．

例 6 $N = (\{p\}, \{s, t\}, A, e, \langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\})$ とする．ただし，$A(s) = \langle\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\rangle$, $A(t) = \langle\langle 1 \rangle, \langle 0 \rangle\rangle$, $e(s) = a$, $e(t) = b$ である．



このペトリネット N に対し，

$L_0(N) = \{\alpha \mid$ 任意の $u \sqsubset \alpha$ に対して $\#_a(u) \geq \#_b(u)\}$,

$L_1(N) = L_0(N) - (ab)^\omega$,

$L_2(N) = \phi$,

$L_3(N) = L_0(N) - D(ab)^\omega$,

$L_4(N) = \{u \mid \#_a(u) = \#b(u) + 2\} L_0(N) \cap L_0(N)$,

である．ここで，$\#_a(u)$ は文字 a の u における出現回数を表し，D は $\{a,b\}$ 上の $Dyck$ 集合である．

$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ は非決定性有限オートマトンで，状態の有限集合 Q，入力アルファベットΣ，遷移関係$\delta\subseteq Q\times\Sigma\times Q$，初期状態 s，受理状態の集合 Fからなるものとする．任意の$\alpha=\langle q_1,a_1,p_1\rangle\langle q_2,a_2,p_2\rangle\ldots\in\delta^\omega$は $q_1=s$ かつ任意の i に対して $p_i=q_{i+1}$のとき，Mのランと呼ばれる．Mのラン$\alpha=\langle q_1,a_1,p_1\rangle\langle q_2,a_2,p_2\rangle\ldots$ に対し，$M(\alpha)=q_1q_2q_3\ldots$ と$\Sigma(\alpha)=a_1a_2\ldots$ と定義する．

すると，ペトリネット同様，Mで受理される次のような 5 種類のω言語を定義できる．

$L_0(M)=\{\Sigma(\alpha)\,|\,\alpha$は Mのラン $\}$, $L_1(M)=\{\Sigma(\alpha)\,|\,\underline{M(\alpha)}\cap F\neq\phi\}$, $L_2(M)=\{\Sigma(\alpha)\,|\,\underline{M(\alpha)}\subseteq F\}$,

$L_3(M)=\{\Sigma(\alpha)\,|\,\underline{\underline{M(\alpha)}}\cap F\neq\phi\}$, $L_4(M)=\{\Sigma(\alpha)\,|\,\underline{\underline{M(\alpha)}}\subseteq F\}$.

さらに，$\mathbf{E}_i=\{L_i(M)\,|\,M$は$\Sigma$上の非決定性有限オートマトン $\}$ $(i=0,\ldots,4)$ と定義する．

非決定性有限オートマトンで受理されるω言語の場合，$\mathbf{E}_0=\mathbf{E}_2\subset\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_4\subset\mathbf{E}_3$ となることが知られている [6, 7, 11]．われわれは同様の結果をペトリネットω言語のクラス $\mathbf{P}_i$に対して示す．

この節の証明のために，発火列のω言語で定義されるペトリネットの新しい受理条件を定義しよう．$N=(P,T,A,e,m_0,\phi)$，$R\subseteq T^\omega$に対し，

$$L(N,R)=\{e(\alpha)\,|\,m_0[\alpha\rangle \text{ and } \alpha\in R\}$$

と定義する．

定理 3 任意の$i=0,\ldots,4$ に対し$\mathbf{P}_i=\{L(N,R)\,|\,N$はペトリネット, $R\in\mathbf{E}_i\}$.

証明．$N=(P,T,A,e,m_0,\phi)$，$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ とし，$L_i(M)=R$とおく．Nと Mの積オートマトン N'を構成し，Nと Mを同時平行的に模倣させれば，$L(N,R)=L(N,L_i(M))=L_i(N')$ とできる．

$N=(P,T,A,e,m_0,F)$，$L=L_i(N)$ とする．各$t\in T$と $m\in F$に対し，新しい遷移t_mを Nに付け加え，t と同じラベルを付ける．ここで，$m_1[t_m\rangle m_2$である必要十分条件が $m_1\geq m$ かつ $m_1[t_m\rangle m_2$であるようにする．$m_1\geq m\in F$は $m_1\in\uparrow F$を意味するので，t_mはt と同じ働きをすると同時に，現在のマーキングが$\uparrow F$ に属すか否かも検査できる．

$T_F=\{t_m\,|\,t\in T$かつ $m\in F\}$ とすると，明らかに

$L_0(N) = L(N', T^{\omega})$, $L_1(N) = L(N', T^*T_FT^{\omega})$, $L_2(N) = L(N', T_F^{\omega})$,

$L_3(N) = L(N', (T^*T_F)^{\omega})$, $L_4(N) = L(N', T^*T_F^{\omega})$

が成り立ち，$T^{\omega} \in \mathbf{E}_0$, $T^*T_FT^{\omega} \in \mathbf{E}_1$, $T_F^{\omega} \in \mathbf{E}_2$, $(T^*T_F)^{\omega} \in \mathbf{E}_3$, $T^*T_F^{\omega} \in \mathbf{E}_4$ である．[6, 7] □

定理 4 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_2 \subset \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_4 \subset \mathbf{P}_3$.

証明．$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_2 \subseteq \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_4 \subseteq \mathbf{P}_3$ となることは定理3と $\mathbf{E}_i$ に対する結果より明か．以後，クラス $\mathbf{P}_i$，$i = 0, 1, 3$ を考える．これらのクラスの間の真の包含関係を導くために，任意のペトリネット N に対し，$L_0(N)$ は閉集合であり，$L_1(N)$ は閉集合の加算和で表されるというクラス $\mathbf{P}_0$ と $\mathbf{P}_1$ の位相的な性質を示す．ここで考えている位相は，開集合として $L\Sigma^{\omega}$, $(L \subseteq \Sigma^*)$ をとったものである．

$N = (P, T, A, e, m_0, F)$，$\{u \mid u \sqsubset \alpha\} \subseteq \{u \mid u \sqsubset \alpha \in L_0(N)\}$ とする．$L_0(N)$ が閉集合であることを示すために，$\alpha \in L_0(N)$ を示そう．α の接頭語を生成する有限発火列の全体 $C = \{w \mid e(w) \sqsubset \alpha$ かつ $m_0[w\rangle\}$ は無限集合になるので，König の補題により，$\beta \in T^{\omega}$ が存在して，$\{u \mid u \sqsubset \beta\} \subseteq C$ が成り立つ．これは $m_0[\beta\rangle$ かつ $e(\beta) = \alpha$ を意味するから，$\alpha \in L$ である．

各 $m \in \mathbf{N}^P$ に対し，$N_m = (P, T, A, e, m, F)$ とする．

$$L_1(N) = \bigcup \{e(w)L_0(N_m) \mid m_0[w\rangle m \in \uparrow F\}$$

であり，これは閉集合の加算和である．この結果真の包含関係 $\mathbf{P}_0 \subset \mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}_3$ について，ω 正則言語の位相的特徴付けから次のような例を見つけることができる [6, 7].

$$a^*b^{\omega} \in \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$$

$$(a^*b)^{\omega} \in \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1$$

□

最後にペトリネット ω 言語の閉包性を証明する．

定理 5 ペトリネット ω 言語のクラス $\mathbf{P}_i$ $(i = 0, 1, 3)$ 集合和，共通部分に関して閉じていて，補集合演算に関して閉じていない．

証明．$N' = (P', T', A', e', m', \phi)$ と $N'' = (P'', T'', A'', e'', m'', \phi)$ を同時に模倣するペトリネット N を次のように定義する．$N = (P' \cup P'', T, A, e, m' \oplus m'', \phi)$,
ここで,

$$T = \{\langle t', t'' \rangle \in T' \times T' \mid e'(t') = e''(t'')\},$$

であり，各 $\langle t', t'' \rangle \in T$ に対し,

$$A(\langle t', t'' \rangle) = \langle {}^\bullet A'(t') \oplus {}^\bullet A''(t''), A'(t')^\bullet \oplus A''(t'')^\bullet \rangle,$$

$$e(\langle t', t'' \rangle) = e'(t')$$

と定義する．ただし，$\langle {}^\bullet A'(t') \oplus {}^\bullet A''(t'') \rangle$ は ${}^\bullet A'(t')$ と ${}^\bullet A''(t'')$ を並べてえられる $\mathbf{N}^{P' \cup P''}$ のベクトルである．

このとき，$R' \subseteq T'^{\omega}$, $R'' \subseteq T''^{\omega}$ に対して,

$$R_{\cup} = \{\langle t_1', t_1'' \rangle \langle t_2', t_2'' \rangle \cdots \in T^{\omega} \mid t_1' t_2' \cdots \in R_1 \text{ または } t_1'' t_2'' \cdots \in R_2\},$$

$$R_{\cap} = \{\langle t_1', t_1'' \rangle \langle t_2', t_2'' \rangle \cdots \in T^{\omega} \mid t_1' t_2' \cdots \in R_1 \text{ または } t_1'' t_2'' \cdots \in R_2\}$$

とおくと,

$$L(N', R') \cup L(N'', R'') = L(N, R_{\cup}),$$

$$L(N', R') \cap L(N'', R'') = L(N, R_{\cap})$$

が成り立つ．

$\mathbf{P}_0$ と $\mathbf{P}_1$ が補集合に対して閉じていないことは，定理 4 の証明で与えた位相的な性質と，正則 ω 言語に対する同様の結果から，明かである．$\mathbf{P}_3$ が補集合に関して閉じているとしよう．例 6 の $L_3(N) = L_0(N) - D(ab)^{\omega}$ を考えると，$(\Sigma^{\omega} - L_3(N)) \cap L_0(N) = D(ab)^{\omega}$ であるから，$L_3(N) = D(ab)^{\omega}$ となるペトリネット $N = (P, T, A, m_0, e, F)$ が存在するはずである．このとき，ある j, k が存在して $m_0[a^j\rangle m_1[a^k\rangle m_2$ かつ $m_1 \leq m_2$ とできる．$a^j b^j (ab)^{\omega} \in L_3(N)$ なので，このことは $a^{j+k} b^j (ab)^{\omega} \in L_3(N)$ を意味し，矛盾である．よって，$\mathbf{P}_3$ も補集合に関して閉じていない．

□

References

[1] J.R.Büchi, On a decision method in restricted second-order arithmetic, *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (Stanford Univ. Press, 1960) 1–11.

[2] W. Fujikawa, Some Decision Problem for Vector Addition systems and Petri Nets, 修士論文，東工大 (1979).

[3] M.Parigot and E.Pelz, A logical formalism for the study of the finite behaviour of Petri nets, *Advances on Petri nets 1985, LNCS* 222, 346–361.

[4] E.Pelz, ω-languages of Petri nets and logical sentences, *Proceedings of Application and Theory of Petri Nets* 1986.

[5] C.Petri, Kommunikation mit Automaten, Ph.D. dissertation, University of Bonn (1962).

[6] L.Staiger and K.Wagner, Automatentheoritische und Characterisierungen topologischer Klassen regularer Folgenmengen, *E.I.K.* 10 (1974) 379–302.

[7] M.Takahashi and H.Yamasaki, A note on ω-regular languages, *T.C.S.* 23 (1983) 217–225.

[8] H.Yamasaki, M.Takahashi and K.Kobayashi, Characterization of ω-regular languages by monadic second-order formulas, *T.C.S.* 46 (1986) 91–99.

[9] J.L.Peterson, ペトリネット入門，市川・小林訳，共立出版 (1984).

[10] H.Yamasaki, ペトリネットの理論と応用，情報処理　25 (1984) 188-198.

[11] K.Wagner, On ω-regular sets, *Inf. and Contr.* 43 (1979) 123–177.